Sistemi lineari e algoritmo di eliminazione di Gauss

Un sistema lineare si presenta:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

a_{ij} — j: colonne; i: righe

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

La soluzione del sistema sarà $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ che inseriti nelle uguaglianze le verificano.
Questo sistema si può maneggiare per farlo diventare più compatto:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{12}x_2 \\ \vdots \\ \dots \end{pmatrix} + \dots \begin{pmatrix} a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

intesi come vettori

Diventa:

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \end{pmatrix} + \dots x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

essendo x_1 scalare

Un sistema lineare diventa una <u>combinazione lineare di "vettori"</u>.
Ci sono sistemi lineari <u>impossibili</u> da risolvere ovvero quando tutti i coefficienti dei termini sono nulli e il termine noto non nullo:

$$0x_1 + 0x_2 = 3 \qquad x_1, x_2 \ ?$$

① Se vi sono equazioni con tutti i termini a 0 nel sistema possiamo scartarla (una riga) poiché non è rilevante.

I sistemi si dicono EQUIVALENTI se hanno la stessa soluzione!

Scriviamo il sistema:

x_1	x_2	x_3	...	x_n	
a_{11}	a_{12}	a_{13}		a_{1n}	b_1
a_{21}	a_{22}				b_2
⋮	⋮	⋮		⋮	
a_{m1}	a_{m2}	...		a_{mn}	b_m

Risolverlo significa trovare il sistema $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ che <u>VERIFICHI IDENTICAMENTE</u> il sistema.

② Cosa accade se una colonna ha tutti coefficienti pari a 0? Non possiamo trascurare la variabile x_i ma anzi il sistema sarà risolubile per un qualsiasi valore di x_i (tanto la moltiplico per 0). Trascuro quindi momentaneamente la colonna ma trovata la soluzione ci posso mettere un qualsiasi valore (arbitrario).

La prima operazione che si potrebbe fare su un sistema ① è permutare la posizione delle righe o anche se vogliamo permutare la posizione delle colonne (ricordandosi di rimettere in ordine il nome delle incognite alla fine).
② È possibile inoltre sommare equazioni tra loro (non facciamo altro che sommare i coefficienti) o se vogliamo è possibile sommare o sottrarre a un'equazione i coeff. di un'altra (o suoi multipli). ③ È ovvio che si potrà sommare ad entrambi i membri o moltiplicare/dividere (non per ∅).

SISTEMI DIAGONALI

Il sistema è caratterizzato dall'avere tutti i coeff. ad eccezione della diagonale uguali a ∅. È un "finto" sistema.

x_1	x_2	x_3		
3	0	0	7	$3x_1 = 7$
0	2	0	13	$2x_2 = 13$
0	0	6	19	$6x_3 = 19$

⇒

UNA SOLUZIONE

Si può risolvere perché i coeff. sulla diagonale sono tutti diversi da ∅.
Se uno di quelli fosse ∅ l'equazione è impossibile (se il termine noto è diverso da ∅) oppure si scarta l'equazione se il termine noto è nullo.

⇒

3	0	0	7	
0	2	0	13	
0	0	0	5	→ IMPOSSIBILE

IMPOSSIBILE

Se il termine noto è nullo però allora posso sopprimere la colonna di x_3 (INFINITÈ SOL.)

SISTEMI TRIANGOLARI (i diagonalini sono un caso)

x_1	x_2	x_3	
3	/	/	← quello che vogliamo
∅	2	/	
∅	∅	1	

supponiamo ⇒

$$3x_1 + x_2 + 6x_3 = b_1$$
$$2x_2 + 6x_3 = b_2$$
$$x_3 = b_3$$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

Il sistema ha tutti i coeff. sotto (o alternativamente sopra) uguali a ∅.
Il sistema si risolve partendo dall'ultima equazione che ha una sola incognita e risolvendo quindi le altre a cascata.
Se ci fossero degli zeri lì tanto meglio.

SISTEMI A SCALA (i triangolarini sono un caso)

⊗	x_2	⊗	x_4	⊗	⊗
1	2	3	4	5	6
∅	∅	2	1	0	1
∅	∅	∅	∅	3	0
∅	∅	∅	∅	∅	1

In questi sistemi è possibile individuare una sorta di scala al di sotto della quale ci sono tutti coefficienti nulli e sugli scalini non ci sono zeri.

Non è detto che gli scalini abbiano tutti la stessa lunghezza.
Di solito quello che si fa è scegliere su ogni scalino i primi termini diversi da zero (detti PIVOT).
Quello che facciamo è portare all'altro membro i termini non considerati tra quelli precedenti.

$$x_1 + 3x_3 + 5x_5 + 6x_6 = b_1 - 2x_2 - 4x_4$$
$$2x_3 + x_6 = b_2 - x_4$$
$$3x_5 + 2x_6 = b_3$$
$$x_6 = b_4$$

SOTTO I PIVOT CI DEVONO ESSERE GLI ZERI

Il sistema così ottenuto è di tipo TRIANGOLARE.
Quello che si fa è estrarre il sistema triangolare!

Abbiamo: $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 + x_3 = 1 - 2x_2 \\ 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_4 = 2 \end{array}$$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

Otteniamo: $x_4 = 2$

$x_3 = -\frac{4}{3}$

$x_1 = \frac{7}{3} - 2x_2$ con x_2 arbitrario sarà:

soluzioni $\begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{4}{3} \\ x_2 \\ \frac{7}{3} - 2x_2 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{array}{l} x_1 = \frac{7}{3} - t \\ x_2 = t \\ x_3 = -\frac{4}{3} \\ x_4 = 2 \end{array}$

SISTEMI GENERICI

L'algoritmo di Gauss trasforma un sistema qualsiasi in un sistema a scala e quindi facilmente risolvibile. Il modo per farlo è "giocare" sulle equazioni con le 3 operazioni possibili viste prima.

- $\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}$ Permutiamo la prima e seconda colonna:

$$\begin{array}{ccc|c} x_2 & x_1 & x_3 & \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = 1 \\ x_1 = 1/2 \\ x_3 = 3/2 \end{array}$$

- $\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}$ In questo caso quello che si fa è sommare o sottrarre all'equazione il multiplo di qualcun altra, in modo da ricondurci a scala:

$R_2 = R_2 - R_3 \Rightarrow$

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \quad R_3 = R_3 - R_1 \Rightarrow \quad \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Diventa: $x_1 + 2x_2 = -x_3$ $\quad x_2 = -1$

$-x_2 = 1$ $\quad x_1 - 2 = -x_3$ $\quad \begin{pmatrix} 2 - t \\ -1 \\ t \end{pmatrix}$

- $\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{array}$ PERMUTIAMO LA I e II COLONNA $\Rightarrow$ $1^a \leftrightarrow 2^a$

$$\begin{array}{ccc|c} x_2 & x_1 & x_3 & \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{array} \quad \begin{array}{l} R_3 = R_3 - R_1 \\ \in \\ R_4 = R_4 + R_1 \end{array} \Rightarrow \quad \begin{array}{ccc|c} x_2 & x_1 & x_3 & \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}$$

Quando vado ad eseguire somme e sottrazioni tra equazioni la prima colonna o riga non varia perché ci sono gli 0:

$$\begin{array}{ccc|c} x_2 & x_1 & x_3 & \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow \quad 2x_2 + x_1 = 1 - x_3$$

$$2x_1 = -2x_3 \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_1 = -t \\ x_2 = 1/2 \\ x_3 = t \end{array} \qquad t \in \mathbb{R}$$

• (x3) 2 0 1 | 1 — Consideriamo a_{11} il pivot. Per annullare gli altri:
(x2) 3 2 1 | 0
4 2 1 | 1

Moltiplichiamo la prima per 3 e la usiamo temporaneamente.

sottraiamo
6 0 3 | 3 ⇓

2 0 1 | 1
0 4 −1 | −3 e così via...
4 2 1 | 1

CIFRE ROMANE PER LE RIGHE

• 2 1 1 | 1 — I ↷ II → 1 3 2 | 1 — II − 2I → 1 3 2 | 1
1 3 2 | 1 ⇒ 2 1 1 | 1 ⇒ 0 −5 −3 | −1
3 4 3 | 1 3 4 3 | 1 III − 3I 0 −5 −3 | −2

SI VEDE SUBITO CHE È IMPOSSIBILE PERCHÈ LA II E III SONO UGUALI TRANNE IL TERMINE NOTO!!!

• 2 3 2 | 1 — II − 3/2 I → 2 3 2 | 1 (pivot) → 2 3 2 | 1
3 2 2 | 1 ⇒ 0 (2 − 9/2) (2 − 3) | ... ⇒ 0 −5/2 −1 | −1/2
4 2 3 | 0 III − 2I 0 −4 −1 | −2 0 −4 −1 | −2

Per comodità scambiamo la seconda colonna con la terza così abbiamo pivot = 1.

x1 x2 x3 | 2 2 3 | 1 — III − II → x1 x3 x2 | 2 2 3 | 1
0 −1 −5/2 | −1/2 ⇒ 0 −1 −5/2 | −1/2
0 −1 −4 | −2 0 0 −3/2 | −2

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

• 1 0 1 | 0
2 2 0 | 0
1 0 2 | 0

I termini noti sono 0 e 0 restano qualsiasi operazione si compia per cui si preferisce non trascriverseli (sistema OMOGENEO)

⇓ 1ª ↷ 2ª

x2 x1 x3 | 0 1 1 — II ↷ I → 2 2 0 ⇒ 0 1 1 | 0 1 2 — III − II → 2 2 0 | 0 1 1 | 0 0 1

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

• x1 x2 x3 | 1 2 1 | 2 0 1 | 3 2 2 — 1ª ↷ 2ª ⇒ x2 x1 x3 | 2 1 1 | 0 2 1 | 2 3 2 — III − I ⇒ 2 1 1 | 0 2 1 | 0 2 1 ← È INUTILE

$2x_2 + x_1 = -x_3$
$2x_1 = -x_3$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/4 \\ t \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$

Sicuramente un sistema omogeneo non è impossibile (termine noto nullo) e avrà sempre almeno 1 soluzione nulla.

DEFINIZIONE SISTEMA A SCALA

Prendiamo:

1	1	1	2	3
ø	2	ø	1	4
ø	ø	ø	3	2
ø	ø	ø	ø	1

NON È A SCALA!

L'azione consigliata in questo caso è quella di spostare la 3ª con la 2ª colonna, se vi è cioè una colonna che presenta un numero diverso da ø e gli altri sotto sono nulli è preferibile spostarla a sinistra (più ø ci sono, più va a sinistra).
Si cerca di fare uno **SCALINO CON ELEMENTI DIVERSI DA ø.**

DEFINIZIONE:

Ignorate righe e colonne con tutti numeri uguali a ø, chiamo K_i l'**INDICE DI COLONNA** del primo elemento non nullo della riga i, allora sarà:

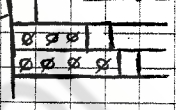
$$K_1 < K_2 < \dots < K_m$$

(cioè il pivot della seconda riga sta più a destra di quello della prima riga)

Ciò significa che:

$a_{ij} \neq ø$ (colonne) $\quad \forall j : K_i \leq j < K_{i+1}$

K_i sarà 1



Quindi una prima operazione può essere permutare colonne e righe cercando di portare alla 1ª colonna quella con il maggior numero di zeri in modo da ricavare in modo più semplice il pivot con somma e sottrazione di equazioni. Per ultimo quello che si fa è permutare le colonne cioè se vi sono altre colonne con un pivot e tutti gli altri ø li si accostano alla prima.
Questo processo sarà poi utilizzato per le righe successive.

SISTEMI A PIÙ TERMINI NOTI

Immaginiamo di voler considerare due sistemi uguali per i coefficienti delle incognite, non per i termini noti. Abbiamo più colonne per i termini noti e si opera normalmente cercando di ottenere il sistema a scala, risparmiando così tempo:

1	2	3	1	0	$\text{II}-2\text{I}$	1	2	3	1	ø	$\text{III}-\frac{1}{4}\text{II}$	1	2	3	1	ø
2	0	1	2	1	$\Rightarrow$	ø	-4	-5	ø	1	$\Rightarrow$	0	-4	-5	ø	1
1	1	2	1	0	$\text{III}-\text{I}$	ø	-1	-1	ø	ø		ø	ø	1/4	ø	-1/4

A questo punto si può procedere in due modi:

- considerare le colonne separatamente e risolvere i sistemi separatamente.
- procedere con l'algoritmo **GAUSS-JORDAN** (francese): quello che cerchiamo di fare è (con le stesse procedure) eseguire "l'inverso" di quanto fatto fin ora cioè cercare di azzerare i termini sopra il pivot in modo da avere un sistema a diagonale più semplice da risolvere:

II e III $\Rightarrow$	1	2	3	1	ø	Lo facciamo in due tempi											
	ø	-4	ø	ø	-4	$\text{I}-12\text{III}+\frac{1}{2}\text{II}$	1	ø	ø	1	1						
	ø	ø	1/4	ø	-1/4	$\Rightarrow$	ø	-4	ø	ø	-4						
							ø	ø	1/4	ø	-1/4						

Ora è quasi risolto. Occorre dividere ogni equazione per il coefficiente dell'incognita (**MATRICE IDENTICA**)

1	ø	ø	1	1
ø	1	ø	ø	1
ø	ø	1	ø	-1

QUESTA È LA SOLUZIONE

	1° SISTEMA	2° SISTEMA
	$x_1 = 1$	$x_1 = 1$
	$x_2 = ø$	$x_2 = 1$
	$x_3 = ø$	$x_3 = -1$